Öğrendiğimiz haliyle sayıların kavramlaştırılması sorunludur.

1, 2, 3, … diye 1'den başlayıp tek tek artarak giden sayılara "sayma sayılar" dendiğini öğrendik. Ben yalnızca bunlara "sayı" diyorum. Sayıların kümesi, genellikle N ile gösterilir.

$N=\{1, 2, 3, \ldots\}$

Diyelim ki i bir sayı ve A_i i'den başlayan sayıların kümesi olsun. Bu durumda A_1 doğrudan N olur ve N'den farklı ilk A_i de A_2 olur.

$A_2=\{2, 3, 4, \ldots\}$

N'nin ve A_2'nin kaç elemanı var diye saymaya kalksak saymanın sonu gelmez, bu bakımdan her ikisi için de eleman sayısının sonsuz olduğunu söyleriz.

Kümelerin eleman sayısını $s(.)$ fonksiyonuyla gösterirsek $s(N)$ de $s(A_2)$ de sonsuzdur. Nasıl tek bir sayı yoksa ve 1, 2, 3, … gibi farklı farklı sayılar varsa sonsuz da tek değildir ve $s(A_1)$, $s(A_2)$, $s(A_3)$, … gibi farklı farklı sonsuzlar düşünülebilir. Nasıl 1 ve 2'nin her ikisi de sayı olduğu için "$1 = 2$" diyemiyorsak ikisi de sonsuz olduğu için "$s(N) = s(A_2)$" diyemeyiz. Bize bunun tam tersi öğretildi. Halbuki, A_2 ve $\{1\}$ kümelerinin kesişimi boş küme ve birleşimi N olduğu için, çıplak gözle de görülebileceği gibi $s(A_2) = s(N) - 1$. Daha genel olarak hiçbir çelişkiye düşmeden şunu diyebiliriz.

Çelişkisiz: $s(A_i) = s(N) - i + 1$

Dediğim gibi bize öğretilen bundan farklıdır. Diyelim ki i N kümesinin bir elemanıyken j, i'ye eşit ya da daha büyük bir sayıdır ve $a_{i,j}$, A_i kümesinin j. elemanıdır. Bu durumda $a_{i,j}=j+i$ kullanılarak A_i kümesinin elemanları 1, 2, 3 diye endekslenebilir. O halde A_i kümesindeki her elemana karşılık N kümesinde bir eleman vardır.

Çelişik: $s(A_i) = s(N)$

Çelişkiyi görmek için N_j‘yi j‘ye kadar olan sayıların kümesi olarak tanımlayalım; bu, en büyük elemanı $a_{i,j}$‘nin endeksi olan sayıların kümesidir ve $a_{i,j}$‘nin endeks kümesi diyebiliriz. Açıkça görüldüğü üzere $a_{i,j}$, N_j kümesinin elemanı değildir. A_i kümesinin elemanları, kendi endeks kümelerinde yer almaz. O halde N, A_i kümesindeki tüm elemanların endeks kümesiyse A_i‘nin elemanlarının en az bir tanesi N‘de yer almaz. Halbuki N‘de yer almayan ama A_i‘de yer alan hiç bir eleman yoktur. Bir kümenin elemanlarının en az bir tanesi başka belirli bir kümede yer almazken tümünün o başka belirli kümede yer alması çelişkidir. Bu endeksleme yöntemi, ancak sayılar kümesinin bir alt kümesi, sayılar kümesinin ötesine, çelişik biçimde sonsuzdan sonra 1 taşırılarak sanki geçerlilik kazanır.

Bir yandan sonsuzun bir sayı olduğunu zımni olarak benimsemek çelişik düşünmeye yol açıyor. Diğer yandan sonsuzun bir sayı olmadığı, sayılar gibi davranan farklı farklı sonsuzların olduğunu benimsemek tutarsızlığa düşmeden sonsuzu kavramamızı sağlıyor. Çelişkisiz yoldan gidersek her biri sonsuz olan $s(A_i)$‘lerin de N kümesinin elemanı olduğunu fark ederiz. N kümesini çelişkiye düşmeden bir de böyle düşünebiliriz.

$N=\{s(A_1), s(A_2), s(A_3), \ldots\}$

N kümesi bu biçimde kavrandığında geriye bir sorun kalıyor.

$N=\{1, 2, 3, \ldots, s(A_3), s(A_2), s(A_1)\}$

Sayılardan, yani 1, 2, 3, …’dan sonsuzlara yani …, $s(A_3)$, $s(A_2)$, $s(A_1)$‘e nasıl geçilir. Bu sorunu ussal olarak çözebilmemiz olanaklı gözükmüyor ama ussal olarak yani bir tutarlılık olarak anlayamazken bu konuda tutarsızlığa düşmeden diğer şeylerle ilişkilerini çelişkisiz yoldan ussal olarak kavrayabiliyoruz. Yani sonsuzun ussal çözümlemesi olmasa da ussal kavranışı mümkündür.

Hiç karşılaşmayacağımız şeyleri düşünebiliriz. Karşılaştıklarımızla düşündüklerimizin bağlantısına bu yazıda hiç girmemeye gayret edip yalnızca düşündüklerimizin kendi iç bağlantılarına yoğunlaşsam da zımni olarak karşılaşabileceklerimizle kendimi sınırlamaya da gayret ediyorum. Karşılaşabileceğimiz nicellikler, sayılarla sınırlı değildir. 3 arabadan söz edebildiğimiz gibi yarım litre sütten de söz edebiliyoruz. “3 araba” ifadesindeki 3 sayıyken “yarım litre süt” ifadesindeki yarım, orandır.

Oranlarla ilgili önermeleri, 0 ile 1 aralığında anlayabiliriz. Buradan elde edilen sonuçlar ile 1 ile 2, 2 ile 3 aralığı anlaşılabilir ve bu tüm oranları anlamamızı sağlayacak biçimde genişletilebilir.

Sıfırı, sayılamadığı için sayı olarak almadım dolayısıyla sayıların oranı da sıfır olmaz. 0 ile 1 aralığındaki oranlar, 0’ı kapsamaz, 1’i kapsar. Önce □=*1/s(N)* biçiminde bir oran tanımlandıktan sonra oranlar kümesi, *Q*, bu oran kullanılarak tanımlanabilir.

Q={□, 2□, 3□, …, s(A_3*)□, s(*A_2*)□, s(*A_1*)□}*

Bu biçimde kavranan oranlar kümesinin elemanları □‘u, yani ussal olarak çözümlenemeyecek ama çelişkiye düşmeden kavranabilecek bir bileşeni içerir. Bildiğimiz oranları nasıl kapsadığını anlayabilmek için yarıma bakalım. *N*, alt kümelerinin eleman sayılarının tümünü kapsadığına göre çift sayılar kümesinin, *Ç*‘nin eleman sayısını da kapsar ve *s(N)=2s(Ç)*. Bundan dolayı, *1/2=s(Ç)/s(N)=s(Ç)□* olur ki yarım *Q*‘nun bir elemanıdır.

Q‘nun bir elemanı olmayan, karşılaştığımız başka nicelikler var mıdır? Bırakın bir şeylere karşılık gelip gelmemeyi daha *Q*‘nun elemanları arasında işlemler yaparken *Q*‘nun elemanı olmayan ikinin kare kökü gibi nicelikler beliriyor. (Bknz. Platon’un Menon diyalogu)

İkinin kare kökü, bir oransa iki sayının oranıdır. Söz konusu oranın sadeleştirildiği düşünülürse bu iki sayıdan en çok biri, çift olabilir. Oranlarının karesi iki olan sayılara, x ve y diyelim; o halde $x^2/y^2=2$ olur ve x ve y’den en fazla biri çift sayıdır. Tanım gereği $x^2=2y^2$ olduğundan x çifttir ve y tek olmalıdır. Ama x çiftse $x=2z$ eşitliğini sağlayacak bir z sayısı vardır ki bu $4z^2=2y^2$ demektir. Sadeleştirdiğimizde $y^2=2z^2$ olur, yani y de çifttir. İkinin kare kökü bir oransa hem x ve y‘den en fazla biri çift olur hem de x ve y‘den her ikisi de çifttir ki bu bir çelişkidir; o halde ikinin kare köküne, çelişkiye düşmeden oran diyemeyiz.

Oranlar kümesinin elemanlarının bir sonsuzla, yani *s(N)*‘le bağlantılı, ussal olarak çözümlenemeyecek bir bileşeni, yani □ olduğundan oranlar kümesi onu kuran akla önce bir süreklilik olarak görülebilir. Daha dikkatli bakıldığında elemanlarının birbirlerinden ayrık olduğu görülür. Tanımlamış olduğumuz □‘dan daha küçük bir nicelik olabilir, □‘la *2*□ arasında da bir nicelik olabilir, …

Oranlar kümesinin elemanları arasındaki boşlukları *½*□‘u kullanarak doldurabiliriz. Ancak sonsuzluk kullanılarak tanımladığımız □‘un her yeni kullanım biçiminde dikkatli olmalıyız. Yoksa sonsuzun çelişik güya kavranışında olduğu gibi belli bir sonsuzun ötesine taşmayı o sonsuzun içinde kalma sanabiliriz. Böyle dikkatli olursak anlarız ki *½*□ bir oran değildir çünkü *1/(2s(N))*‘e eşittir ve tanımlaması bir sonsuz olan *s(N)*‘den kendisine eşit bir sonsuz kadar taşılmasını gerektirir yani *½*□ iki sayının oranı değildir, bir sayıyla sayıların ötesinde bir niceliğin oranlanmasıyla belirir. *½*□‘nin bir oran olmadığı akılda tutularak yeni tür bir nicelikler kümesi tanımlayabiliriz.

R={½□, □, 1½□, 2□, 2½□, 3□, 3½□, …}

Çağdaş matematikteki reel çözümlemede reel sayılar kümesi olarak tanımlanan küme buna özdeştir. Peki ikinin kare kökü bu kümenin elemanı mıdır? Bunun hiç bir güvencesi yoktur. Bu küme sürekli bir küme midir? Açıkça hayır.

Oranların ötesinde niceliklerin düşünülebilecek tek kümesi reel sayılar kümesi denilen küme değildir. Örneğin oranlar kümesinde □‘dan önceki boşluğu tek bir nicelikle değil, sayılar kümesinin tüm elemanlarına karşılık gelecek bir çoklukla doldurabiliriz. Bu durumda □‘a kadar {□^{2}, 2□^{2}, 3□^{2}, …} kümesindeki elemanların tümü bulunur. Bu da ayrıklıkları tamamen gidermez bu sefer de □^{2}‘ye kadar {□^{4}, 2□^{4}, 3□^{4}, …} kümesindeki elemanlarla doldurabilecek bir süreksizlik belirir. *R*‘nin ötesine geçip *Q*‘daki boşlukları ne kadar doldurursak dolduralım, ayrıklıklardan kurtulup sürekliliğe varamayız. İkinin kare kökü gibi oran olmayan ama oranların işlemlerinde ortaya çıkan nicelikleri çözümsel olarak bulamayız.

Süreklilik, aralıklarla düşünülebilir. Örneğin oran olarak 1’i 0 ile 1 arasındaki aralık olarak düşünürüz. Aralıklar, daha küçük aralıklardan oluşur. Örneğin oran olarak 1’e karşılık gelen aralıkta birer aralık olarak $\square$ ve katları vardır. Oranlar kümesini, en küçük aralık olarak $\square$‘u nokta diye alarak kavrarız. Ancak $\square$ da bir aralıktır ve kendileri de birer aralık olan $\square^2$ ve katlarından oluşur. Bu sefer $\square^2$‘yi nokta diye alsak bile sürekliliğe ulaşmış olmayız.

Sürekliliğin ussal bir çözümlemesi mümkün olmaz. Süreklilikleri, mükemmel çözümlemesini yapamasak da aralıklara bölüp aralıklara nokta muamelesi yaparak kavrayabiliyoruz. Aralıklar, nokta olmadığı için sürprizlerle karşılaşabiliyoruz. Sürprizleri sürpriz olmaktan çıkaracak daha derin bir kavrayışla, ussal anlayışımızı geliştiriyoruz.

Burada sunduğum sonsuz kavrayışı, elemanlarının ya da parçalarının ilişkilerinden yola çıkarak ussal bir çözümlemesi mümkün olmasa bile bir şeyi diğer şeylerle ilişkisinde çelişkiye düşmeden kavrayabileceğimizi gösteriyor. Bu genelde bilimlerin imkanına da karşılık gelir. Yani bir kimyacı, atom altında neler olduğuna bakmaksızın atomları ve molekülleri ussal olarak kavrayabilir. Bu kavrayış tamamlanmış ve kesin değildir; örneğin atom altı araştırmalarla, daha güvenilir bir kavrayış geliştirilebilir. Öyle bile olsa bu yeni kavrayış da tamamlanmış ve kesin olmayacaktır. Bu kuşku hali bilimler açısından sorun teşkil etmez; tam tersine bilimlerin sürekli bilimsel gelişmeyi garantileyen özelliğidir.

Bu yazıda matematiği gözleme baş vurmadan salt akıl yürütmeler olarak kullandım. Bu, bilimselliğin ussallığını karşılasa bile, karşılaştıklarımızı tahminde bulunabilecek, gözlemle sınanabilecek biçimde anlama koşuluna uymuyor. Bu anlamda karşılaştıklarımızdan bağımsız salt kurgudur. Bu tür kurguların, ussallıkları elbette bilimsellik bakımından gereklidir ancak yeterli değildir. Bu kurguların bilimselliğini karşılaştıklarımıza uygulanabilirliği sağlar.

Süreklilik sorunu, matematiğin bilimsel düşünceye temel teşkil edecek biçimde karşılaştıklarımıza uygulanabilir anlamında bilimsel olmasının ötesinde karşılaştıklarımızla sınanmayı gerektirmesi bakımından bilim olmasının gerektiğini gösteriyor.

Tek bir insanın düşünmesi söz konusuysa matematik bilimsel düşünmeyi sağlayan zihinsel bir kurgudur. Tek tek insanlar, farklı farklı kurgulara sahip olabilir. Bu kurgulardan, karşılaştıklarımıza uygun olmayanlar zamanla elenir ve uygun olanlar yaygınlaşır. Tek tek insanlarda sapmalar olsa da toplumsal olarak kalıcı olanlar, bilimi oluşturur. Matematiğin bilimliği toplumsal çözümlemeyle anlaşılır.

Reel çözümleme başta olmak üzere, matematiğin çağdaş kuramında ne çelişik güya kavrayışlara, ne de reel sayılar denilen sayıları dayanak yapmaya gerek vardır. Zaten bu sorunlarla üniversitelerde özellikle matematik üzerine çalışanlar dışında neredeyse kimse karşı karşıya gelmez. Matematiğin bilimliği, uygulamayla bağlantılı konularda bu tür sorunların elenmesini sağlar. Yine de unutmamak gerekir ki karşılaştıklarımızdan bağını koparıp salt kurgusal ussal düşünme hoş görülmeseydi hatta hoşgörüyle kalınmayıp desteklenmeseydi bilimin bir kaç yüzyıldır süren akıl almaz hızda gelişimi de olmazdı.