Georg Ferdinand Ludwig Phillip Cantor küme kuramı üzerine ilk makalesini 1874'te yayınlamış ve bir arkadaşına gönderdiği mektupta "onu görüyorum, ama ona inanmıyorum," diye yazmış. Ne yaşadığını, ne söylediğini bilmez durumda düşünler dünyasında kaybolmuş bu keskin zekâ, aslında, ona inandığını, ama göremediğini fark edememiş: Neydi gördüğünü sandığı?

Tüm çift sayıların, yani {2,4,6,8,...} kümesindeki sayıların adedi, tüm sayma sayıların, yani {1,2,3,4,...} kümesindeki sayıların adedine eşit olduğu. Daha önce "görmemiş" olanlar "baksın": Ardışık çift sayıların dizisini düşünelim ve her çift sayıyı —ikiyi 1. çift sayı, dördü 2. çift sayı, altıyı 3. çift sayı vs. olacak biçimde— sıradaki yeriyle adlandıralım. Her sayma sayının bir çifti olduğuna göre, ne kadar sayma sayı varsa o kadar çift sayı vardır. Gördünüz mü? Ancak herhangi bir çift sayıya kadar olan sayma sayıların adedi o çift sayıya kadar olan çift sayıların adedinin iki katıdır. Bu iki için geçerlidir ve ikiden büyük bir çift sayı için geçerliyse ondan sonra gelen çift sayı için de geçerlidir. Dolayısıyla, sayma sayıların adedi, çift sayıların adedinin iki katıdır. Çift sayıların adedine eşit olan aynı zamanda da onun iki katıdır: Göremediniz mi?

İ.Ö. 540 yılı civarında doğan, güney İtalya'da bir kent olan Elea'da yönetim ve yasama işleriyle uğraşan Parmenides ve tahminen İ.Ö. 490-430 arası yaşayan öğrencisi Zenon'un yaptığı hataya düşer Cantor ve onun takipçisi, üniversitede hakim, önde gelen yirminci yüzyıl matematikçileri: Verili mantık kuralları içinde çelişkiye yol açmadan değerlendirilemeyecek bir yaşantıyla karşılaştıklarında, mantığın yetersiz olduğu sonucuna varmaktansa, mantıken aynı argumantasyonun birbiriyle çelişki içindeki birden çok sonucundan birini seçip diğerleri için çelişkiyi göstererek ya da sadece varsayımla eleyerek, yaşananı yanılsama, bir hayal kabul edip, söz konusu durumu görmezlikten gelme.

Parmenides, mantıken, yalnızca 1'in olabileceğini göstermiştir. "Olabileceğini" derken kullanılan Türkçe "olmak" iki anlamlıdır ve genellikle tümce içinde saklı kullanılır. Diğer anlama da gelme olasılığını eleyip, bir anlamını açık ve vurgulu biçimde ifade etmek hemen

hemen imkansızdır. Nedir bu iki anlam:

(i) Dosya kırmızıdır.
(ii) Dosya kırmızılaşıyor.

Olmanın saklı kullanıldığı her iki tümcede de “ dosyanın kırmızı olması” ifade edilmektedir. Bu ayrımı vurgulamak için “olma” ve “oluşma” kullanılabilir:

(i) Dosya kırmızı oluyor.
(ii) Dosya kırmızı oluşuyor.

Parmenides, olmanın çelişki taşımadığını, oluşmanınsa çelişik olduğunu saptar ve tutarlının, yani olmanın, doğru olduğu, oluşmayla ilgili olanın doğru değil sanı olduğu sonucuna varır. Olma düşünülendir, oluşmaysa yaşanan (gözlenen, duyumsanan). Parmenides düşünülene doğruluk değeri verirken, yaşananı bir yanılsama olduğu için görmezlikten gelinmesi gereken olarak değerlendirir. Çokluk çelişki içerdiğinden, olan tektir, 1’dir. “Aklın yolu 1’dir,” denir a, belki de “akılda her şey 1’dir” diye genelleştirilmelidir. Parmenides oluşmanın, yaşananın, çokluğun tutarlı (mantıklı, ussal) biçimde kavranmasının imkansızlığının sonucu olarak, bunlarla ilgili olanın sanı (*doxa*) kabul edilmesi gerektiği savıyla, olmanın, düşünülenin, tekliğin doğru kabul edilmesi gerektiğini ileri sürer.

Elealı Zenon sürekliliği mantıkî, yani rasyonel olarak kavramaya çalışanın kaçınılmaz olarak hataya düşeceğini örneklerle gösterir. Gösterdiği, örneğin, zaman sürekliyse mantıken zamanın olamadığı ya da mekan sürekliyse mantıken mekanın olamadığıdır. Zamanın giderek küçülen parçalara bölünüşünü ve sonunda —sonsuz her ne anlama geliyorsa— sonsuz kere bölünme işlemi yapıldığında zamanda bir ana, yani uzunluğu olmayan bir zaman dilimine ulaşıldığını düşünelim. Hâl bu olunca, suikastçinin attığı kurşun hedefine varıncaya değin her an havadaki yolu üzerinde bir noktada bulunacaktır. Ancak kurşun söz konusu olan anların her birinde bir yerlerde duruyorsa, mantıken hep duruyordur, hareket olmamıştır. Ya da, sokakta dalgın dalgın, ağır biçimde yürüyen bir arkadaşınızı gördünüz, hızla yanına varıp selamlaşmak istiyorsunuz, ama onu yakalamanız mantıken mümkün değildir. Şu anda bulunduğu noktaya geldiğinizde biraz ileride bir noktada olacak ki oraya varmanız için geçen sürede arkadaşınız bir başka noktaya gitmiş olacaktır ki… Bunun böyle “sonsuz”a kadar sürmesi, dolayısıyla arkadaşınızı yakalayamamanız gerekir. Mekanı da zaman gibi gittikçe küçülen parçalara ayırıp, “sonsuz”da, noktaya, uzunluğu, genişliği, yüksekliği, alanı ve hacmi olmayan mekan kesitine ulaşıldığını düşünelim. Bu durumda, noktaların bir araya gelmesinden oluşan mekan da —onu oluşturan noktaların hiç birinin hacmi bulunmadığına göre— mantıken hacimsiz olacaktır. Elealı Zenon da öncüsü Parmenides gibi mantığın yetersiz olduğu sonucuna varacağına, mantıken kavranması imkansız olan şeylerin gerçekleştiği yaşamı bir yanılsama olarak, mantıken, “kavradı”.

Mantığın yetersizliğinin yadsınamaz biçimde ortaya çıktığı durumlarda, ya saklama ya da görmezlikten gelme ortaya çıkıyor. İki sayısının karekökü tam sayılardan oransal olarak bulunamamaktadır; yani birinin diğerine oranı iki sayısının kareköküne eşit olan iki tam sayı bulunmamaktadır. Örneğin iki tane 1 metrelik ip parçasını, bir uçları birbirine bitişik ve aralarındaki açı dik olacak biçimde gerelim. Üçüncü bir ipi uçları, gerildiğinde, diğer iki ipin açıkta kalan uçlarına gelecek biçimde keselim. Bu ipin uzunluğunu nasıl ölçeriz? Önce bir metreden uzunsa ilk bir metrelik kısmının yanına bir metrelik bir ip koyarak ölçeriz. Sonra kalan kısım bir metreden uzunsa ikinci, üçüncü vs.inci metreleri için aynı şeyi yaparız, ki buna gerek kalmaz: Biri bir metrelik, diğeri 1 metreden kısa olmak üzere iki kısım bulunmaktadır. Kalanı ölçmek için 1 metreyi eşit uzunlukta parçalara ayırıp, bunlarla karşılaştırmak gerekir. 2, 3, 4 ya da ne kadar istiyorsak o kadar parçaya ayırabiliriz, sonuç değişmez, ama yerleşik olan geleneğe göre on eşit parçaya ayırıp her birine desimetre diyebiliriz. Bunu yaptığımızda, ipin 1 metre 4 desimetreden uzun, 1 metre 5 desimetreden kısa olduğunu görürüz. Bu durumda desimetreyi eşit parçalara ayırıp aynı işlemi tekrarlamak ve böylece devam etmek gerekir: İp 1 metre 4 desimetre 1 santimetre 4 milimetreden uzun, ancak 1 metre 4 desimetre 1 santimetre 5 milimetreden kısadır. Ne denli ayrıntıya inilirse inilsin tam uzunluk bulunamaz.

Aynı şey 0.3333… sayısı (küsuratta her hanesi üç olan sayı) içinde geçerlidir. Ancak ikinin kare kökü için durum farklıymış gibi sunulabilir; çünkü 0.3333… sayısı hep ona bölerek ölçüm yaptığımızdan böyle bir sonuç veriyor gibidir ve eğer doğrudan ipi üç eşit parçaya bölersek küsuratta ne kadar ayrıntıya inilirse inilsin her hanesi üç olan benzer bir sonuç elde edilebilir. Ancak ikinin kare kökü içinde hangi aşamada hangi sayıda parça alırsanız alın sorun çözülmüyor. Yani bir metrelikleri ve bir metrenin herhangi bir sayıdaki eşit parçalarını kullanarak ikinin kare kökü bulunamıyor. "İyi de ne olacak bundan?" diye sorulabilir. Olacağı mühendis yapının planını çizerken yalnızca rasyonel sayılarla hesap yapar. İpe gelince, inceldiği yerden kopar. Gayrısı ustaların, işçilerin ellerinin ayarına bağlıdır: Hiç bir yapı rasyonel değildir. Ama daha da önemlisi hiç bir plan rasyonel değildir: Gerçek plana mantıksal, oransal olarak ifade edilenlerle, tasarlananlarla yakınsanabileceği düşünülür.

İkiz kenarları 1 metreye eşit, ikiz kenar diküçgenin tabanının ikinin kare kökü ya da kısaca $\sqrt{2}$ (kök iki) olduğunu nasıl biliyoruz? Pitagoras'ın adıyla da anılan bir kurama göre, dik üçgenin hipotenüsünün karesi, diğer iki kenarının karelerinin toplamına eşittir. Birin karesi bir olduğuna göre $1^2+1^2=2$; yani tabanın uzunluğunun karesi ikiye eşit olmalı. Kuram Pitagoras ve müridleri tarafından bilinmektedir. Kenar uzunlukları sırasıyla 3, 4, 5 olan üçgeni, onda ilahi bir şeyler bulup, allayıp pullamalarına karşın düşünülebilecek en basit diküçgenlerden biri olan iki kenarı 1 olan diküçgen, rasyonel olarak kavranamayan sonuç verdiğinde saklanmıştır. Rasyonel olarak kavranması mümkün olmayan, aleni çelişki örtük biçimde yoksayılmıştır.

Her sayı sistemi için referans alınacak bir şeyler olmalıdır. Doğal sayılar için bu fasulyeler olabilir: Hiç fasulye olmaması durumuna sıfır; fasulye olması durumuna 1; fasulye ve fasulye olması durumuna 2; fasulye, fasulye ve fasulye olması durumuna 3; ve saire. Sinema gişesinin önünde sıraya girmiş kişileri bu referansı kullanarak sayabiliriz. Ya da dilini bilmediğimiz birine 4 dememiz gerektiğinde, dört parmağımızı gösteririz. Artık alıştığımızdan ilkokulda her seferinde fasulyelere ya da parmaklarımıza yaptığımız referansı açık açık yapmayız. Ancak 8'e 7 eklerken, zihni yorgun olan biri nasıl parmaklarını sayarsa, rakamları kullandığımızda, her seferinde, zımnî olarak bir referans sistemi kullanırız. Bazı yerlerde fasulye bulunmayabilir ya da işlem yapmak için parmaklar yeterli olmayabilir.

Matematikçiler bunun için hiçten başlayan, her an yeniden kurulabilecek bir referans sistemi geliştirmiştir. Hiç bir şey yoksa bir boş küme düşünülebilir: {} . Buna 1 diyelim. Eğer 1, yani boş küme düşünülebiliyorsa, bunu kapsayan başka bir küme {1}={{}} daha düşünülebilir ve buna 2 denebilir; benzer biçimde 3={2}={{1}}={{{}}} vs. diye tüm tam sayılar için düşünülen bir referans sistemi kurabiliriz.

Parçalar, paylar iki tam sayının birinin diğerine oranlanması yoluyla sayılabilir olur. Örneğin yarım ekmek bir ekmeği ikiye bölmekle ya da iki ekmeği dört eşit parçaya ayırmakla elde edilir. Bir sayıya bölmek o sayı kadar eşit parçaya ayırmak olarak tanımlandığında, bire bölmek, bir parça olarak tutmak anlamına gelir ki bu da bire bölünen, bölünmeden önce neyse o kalır anlamına gelir, yani tam sayılar da bu çerçevede paylar, parçalar, oranlar olarak yorumlanabilir. Bir orana karşılık gelen sayılar rasyoneldir (oransaldır, çelişkiye yol açmadan kavranabilir). Peki, reel sayılar nereden çıkıyor?

Sıfır ve “negatif sayılar” adet ölçmeye yarayan sayılar değildir. Sıfır rasyonel bir sayı olmadığı hâlde, rasyonel olduğu varsayılan bir sayıdır. Örneğin sıfırın kendisi (yani bire bölümü) ile yarısı (yani ikiye bölünmesi) birbirine eşit kabul edilir ki bu mantıken mümkün değildir: Ya sıfır parçalanmış ve ikiye ayrılmıştır, ki durum buysa sıfır kendinden (0÷1) küçüğe (0÷2) eşit olur, yani bu mantığa aykırıdır; ya da sıfır parçalanamamıştır, ki bu durumda sıfırın yarısından (0÷2) söz edemeyiz, yani bu mantıken kavranamaz. Negatif sayılara gelince, aslında bu durumda sayılardan değil, elemanlarından biri ikili değerli, diğeri sayma (ya da pozitif rasyonel) sayı değerli iki elemanlı vektörlerden bahsederiz. Bunlar üzerinde yapılan işlemler, yani mantıkî çıkarımlar, sayılarla ilgili kurallara değil vektörlerle ilgili kurallara göre yapılmalıdır; ki bu durumda negatif sayının kökünün “anlam”ı yok olur, ya da en azından değişir.

Parmenides’in de kavradığı üzere 1 vardır. Bir “den/dan sonraki” işlemi tanımlanarak, sayma sayılara varılabilir. Bu işlemin işaretini “↑” olarak gösterirsek, 1↑=2’dir: Bir”den sonraki” ikidir. Benzer biçimde 2↑=3; 3↑=4; ve saire. “↑” işleminin tersi “↓”, yani “den/dan önceki”dir. Ancak “↓” işlemi uygulandığında sayma sayılar kümesinde karşılığı bulunmayan bir çözüme varılır: 1↓=0 ve 0 sayma sayılar kümesinde değildir. Sayma sayılar kümesinin sıfır eklenerek genişletilmesiyle elde edilen kümeye, hatalı olarak "doğal sayılar kümesi" denmiştir.

"↑" işleminin yinelenmesi yeni bir işlemle, "+", yani toplama işlemiyle özetlenebilir. Örneğin 5↑↑↑=5+3=8. İki doğal sayının toplamı yine doğal sayıya varır. Ancak toplama işleminin tersi için aynı şey söylenemez: Örneğin, 3-5 işleminin sonucu doğal sayılar kümesinde yoktur. Doğal sayılar kümesinin bu tür negatif sonuçları da kapsayacak biçimde genişletilmesi, tam sayılar kümesine varır: {…,-3,-2,-1,0,1,2,3,…}.

"+" işleminin yinelenmesi yeni bir işlemle, "·", yani çarpma işlemiyle özetlenebilir. Örneğin, 5+5+5=3·5=15. İki tam sayının çarpımı yine tam sayı verir. Ancak çarpma işleminin tersi için aynı şey söylenemez: Örneğin, 5÷3 işleminin sonucu tam sayılar kümesinde yoktur. Tam sayılar kümesinin bu tür oransal sonuçları da kapsayacak biçimde genişletilmesi, rasyonel sayılar kümesine varır.

Değinildiği üzere, rasyonel sayılar kümesiyle ilgili, açıkça ortada dururken, çekinmeden görmezlikten getirilmeye, gnostik kurallaştırmalarla çözüldüğüne iman ettirilmeye çalışılan iki sorun bulunmaktadır. İlki rasyonel sayı olmayan sıfırın rasyonel bir sayı kabul edilmesi; ikincisi, negatif sayıların işin içine girmesiyle bir vektör hâline gelen rasyonel sayılarla yapılan işlemlerin vektör işlemleri değil de skalar işlemler kabul edilmesidir.

5↑↑↑ ve 3↑↑↑↑↑ aynı sonuca sekize varmakla birlikte aynı değildir. Örneğin, sekiz kişiyle oynanan bir oyun için beş kişinin üç kişi daha bulmasıyla, üç kişinin beş kişi daha bulması, benzer sonuca varsa da aynı değildir. Dolayısıyla 5+3 ve 3+5 aynı sonucu vermekle birlikte bunun dışında simetrik değildir. Üç tane beşlikle beş tane üçlük, aynı sonucu, yani bir tane onbeşliği vermekle birlikte aynı değildirler. Sıfır bir kenara bırakılıp negatif sayılar işin içine sokulduğunda, bu işlemin ne anlama geldiği ve sonucun ne olduğu belirsizleşmektedir. "Eksi üçlük" ne demektir? "Üçlük"ün bir yerde gruplaşmış üç elmaya karşılık geldiğini düşünelim: "Eksi" salt bir olumsuzlamaysa, "eksi üçlük" o yerde üç elma olmama durumu mudur?

"Eksi"ye bağlama göre anlamlar verilir. Doğuya giderken "eksi üç", batı yönünde üç adım, kâr söz konusuyken "eksi üç" üç paralık zarar olarak yorumlanır. "Eksi" salt bir olumsuzlama değil; eksiden artıya, artıdan eksiye geçişin bir süreklilik olarak algılanmasını sağlayacak biçimde saklanan bir nitelik değişimine yorulur. Bu durum, çocuksuluk çağrıştıracak biçimde "elmalar ve armutlar toplanmaz," olarak dile gelen ilkenin ihlaline gebedir.

İşler, "eksi üç kere"de daha da karışır. "Üç kere" bir şeyin üç kere yinelenmesine karşılık gelir. O hâlde, "eksi" salt olumsuzlamaysa, "eksi üç kere" söz konusu şeyin üç kere yinelenmemesi midir? "Eksi üç kere" "beşlik" ne anlama gelmektedir? Nasıl olur da bu "üç kere" "eksi beşlik"le aynı olur? Hele "eksi üç kere" "eksi beşlik" ne demektir? Ve nasıl olur da "üç kere" "beşlik"le aynı sonucu vermektedir? Burada rasyonel ya da gözleme/yaşantıya bağlı yanıtlar bulamayız. Pozitif rasyonel sayılar için söz konusu olan, neticeye yoğunlaşılarak dayatılan simetriyi bir biçimde taklit eden bir sonucu temellendiren varsayımlara sanki-ilahi yasalarmış gibi gnostik biçimde iman edilmesi beklenir. Ne usla kanıtlanabilen, ne yaşantıyla sınanabilen bu "gerçekler", matematikçinin, durumu bir yere kadar, bir süre idare etmesini sağlasa da, örneğin, negatif sayının kökünde kendini tüm açıklığıyla dışa vurur.

"Durumu bir biçimde idare edebiliyorsak, gnostik biçimde düşünceye yerleşenle yaşamakta ne sakınca olabilir?" diye düşünülebilir. Birin iki olduğunu kanıtlayan ünlü sanki-kanıtı yeniden yazarsak:

$a=b$; iki tarafı da $a$ ile çarpalım:

$a^2=ab$; iki taraftan da $b^2$ çıkaralım:

$a^2–b^2=ab–b^2$; $(a^2–b^2)=(a+b)(a–b)$ ve $ab–b^2=b(a–b)$ olduğuna göre:

$(a+b)(a–b)=b(a–b)$; iki tarafı da $(a–b)$ ile bölelim:

$(a+b)=b$; $a=b$ olduğuna göre:

$2b=b$; iki tarafı da $b$'ye bölelim:

$2=1$.

Bu paradoksal sonucun nedeni iyi bilinir: Sıfır rasyonel değildir, hiçbir sayı sıfıra oranlanamaz. Eksi sayılarla bu tür birçok işlem yapılır ve işlemler gnostik biçimde kabullenilmiş yasalara dayanmaktadır. Dolayısıyla, eksi sayılarla ilgili işlemleri ne yaptığımızı "bilmeden" yaparız. "Bilmeden" ile kasıt "usa dayanmadan ve gözlemle onaylamadan yargılara vararak"tır.

Rasyonel sayılarla ilgili sorunları görmezlikten gelip, örnek vermek gerektiğinde sorunsuz kısmından örnekler seçerek devam edersek: "·" işleminin yinelenmesi "üssü" işlemiyle özetlenebilir. Örneğin, $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$. Bir rasyonel sayının sayma sayı üssü yine rasyonel sayıya varır. Ancak üssü işleminin tersi için aynı şey söylenemez. Örneğin, $\sqrt{2}$ rasyonel sayılar kümesinde yoktur. Rasyonel sayılar kümesinin bu tür oranla ifade edilemeyen sonuçları da kapsayacak biçimde genişletilmesi, hatalı olarak tüm gerçek sayılardan oluştuğu düşünülen "reel sayılar kümesi"ne varır.

"↑" işleminin tersi yani "↓" işlemi sayma sayılar kümesinde olmayan sonuçlar da verir. "↑" işleminin yinelenmesi "+" işlemidir. "+" işleminin tersi yani "-" işlemi doğal sayılar kümesinde olmayan sonuçlar da verir. "+" işleminin yinelenmesi "·" işlemidir. "·" işleminin tersi yani "÷" işlemi tam sayılar kümesinde olmayan sonuçlar verir. "·" işleminin yinelenmesi üssü işlemidir. Üssü işleminin tersi yani "kök" işlemi rasyonel sayılar kümesinde olmayan sonuçlar verir. İmdi, üssü işleminin yinelenmesini düşünelim. Bu üssü işleminin yinelenmesi olan işlemin tersinin "reel sayılar küme"sinde bulunmayan sonuçlar vermeyeceğini biliyor muyuz? "Evet," desek bile bu bilgi olsa olsa gnosistir. Reel sayılar, gözlemlerimiz, rasyonel tasarımlarla uyuşmadığında fark edilir. Örneğin, Unbalanced Eqn olmalıdır, ancak rasyonel olarak kavranamaz.

"↑" işleminin tersi yani "↓" işlemi sayma sayılar kümesinde olmayan sonuçlar da verir. "↑" işleminin yinelenmesi "+" işlemidir. "+" işleminin tersi yani "-" işlemi doğal sayılar kümesinde olmayan sonuçlar da verir. "+" işleminin yinelenmesi "·" işlemidir. "·" işleminin tersi yani "÷" işlemi tam sayılar kümesinde olmayan sonuçlar verir. "·" işleminin yinelenmesi üssü işlemidir. Üssü işleminin tersi yani "kök" işlemi rasyonel sayılar kümesinde olmayan sonuçlar verir. İmdi, üssü işleminin yinelenmesini düşünelim. Bu üssü işleminin yinelenmesi olan işlemin tersinin "reel sayılar küme"sinde bulunmayan sonuçlar vermeyeceğini biliyor muyuz? "Evet," desek bile bu bilgi olsa olsa gnosistir. Reel sayılar, gözlemlerimiz, rasyonel tasarımlarla uyuşmadığında fark edilir. Örneğin, Unbalanced Eqn olmalıdır, ancak rasyonel olarak kavranamaz.

Matematiksel çözümlemede, sayma sayılar için "hiç bir şey yoksa, boş küme vardır," ile başlayıp kurgulanan referans sisteminin bir uzantısında, "reel sayılar" için de bir referans sistemi geliştirilir. Bunun için rasyonel sayılar kümesinde kesimler oluşturulur. Örneğin, $A_1$ 1'den küçük tüm rasyonel sayıların kümesi, $B_1$ 1'den büyük tüm rasyonel sayıların kümesi olsun. Bu durumda rasyonel sayılar kümesi kesilip ikiye ayrılmıştır ve 1 kesim noktasıdır. Bu kesim 1'in referansı olur. Benzer biçimde, karesi ikiden küçük olan tüm rasyonel sayıların kümesine $A_{\sqrt{2}}$ ve karesi ikiden büyük olan tüm rasyonel sayıların kümesine $B_{\sqrt{2}}$ denirse, bu da rasyonel sayılar kümesinin bir kesimi olur. Yalnız kesim noktası, Unbalanced Eqn, rasyonel sayılar kümesinde değildir. $A_1$ ve $B_1$'in birleştirilmesiyle rasyonel sayılar kümesi oluşmaz, bu kümeden 1 eksiktir. Ancak, $A_{\sqrt{2}}$ ve $B_{\sqrt{2}}$'in birleşmesi rasyonel sayılar kümesine varır. Rasyonel sayılar kümesinin $A_{\sqrt{2}}$ ve $B_{\sqrt{2}}$ olarak kesimi $\sqrt{2}$'nin referansı olur. "Reel sayılar kümesi" rasyonel sayılar kümesinin "$A_1$ ve $B_1$ olarak kesim"=1 ve $A_{\sqrt{2}}$ ve $B_{\sqrt{2}}$ olarak kesim"= Unbalanced Eqn biçimindeki kesimlerinin tümü referans olarak kullanılması yoluyla kurulur. Böylece, "reel sayılar" rasyonel olarak kavranmış gibi olur. Hâlbuki, bu sonuç $A_{\sqrt{2}}$ ve $B_{\sqrt{2}}$'nin arasında yalnızca bir tane reel sayı olduğu gnosisine dayanmaktadır.

Aslında, $A_1$ ve $B_1$ arasında tek rasyonel sayı olduğu doğru olmakla birlikte, $A_1$ ve $B_1$ arasında tek reel sayı olması ve bununda 1'e eşit olması da gnosistir. 0.333... 1'in 3'e bölümüne eşit midir? Evet, 1÷3 0.333… gibi bir sonuç verir. Ancak, 1÷3=0.333… olamaz da, çünkü 0.333…'ü 3 ile çarparsak 0.999… olur ki bu açıkça 1.000…'dan, yani 1'den, her hanesi itibariyle farklıdır. 1÷3 varabildiğimiz tüm ayrıntısına kadar küsurat hanelerinde 3 ihtiva etmelidir, ancak hiç ulaşamayacağımız bir yerlerde bundan farklı bir sonuç içermelidir, hatta bu sonuç sıfırla dokuz arasındaki rakamların dışında bir şeyleri de içerebilir. Diğer bir deyişle, 1÷3'ün ondalık sistemde rasyonel bir ifadesi olmamakla birlikte birbirinden farklı birden çok 0.333…'ten söz edilebilir, ki bu 0.333…'ün de rasyonel olmadığını gösterir.

Tüm bu yazılanlardan sonra, "iyi güzel de, insan bu matematiği kullanarak uzaya gitmedi mi, görüntü ve sesleri kıtalar arasında neredeyse anında denebilecek kadar kısa bir sürede aktarmayı başarmadı mı?" diye sorulabilir. Bu sorunun yanıtı "hayır, bunlar bu matematikle yapılmadı"dır. İnsan ve bilgisayarlar, ancak ve ancak rasyonel sayılarla hesap yapabilir. Söz konusu tüm işlemler reel analize gereksinim duymadan, rasyonel sayılar ve fonksiyonlarla gerçekleştirildi. Sıfır ve eksi sayılarda takıldığı yerde, kimi kendini genellemeler olarak gösterse bile, hep duruma özgü olan, yaşananla/gözlenenle uyumlu çözümler geliştirildi. Bilgisayar programcılığı yapanlar bilir; sık sık "Division by zero" ve "Floating overflow" hatalarının yakalanıp, duruma özgü çözümlerin geliştirilmesi zorunluluğu ortaya çıkar: Bu hataların kendiliğinden bilgisayar tarafından çözülmesi mümkün değildir. Sorulması gereken ve yanıtı bu yazının kapsamının ötesinde bulunan soru şudur: Çok az insanın eğitimini aldığı ve "anladığı", pratik uygulamada hiç bir kullanımı bulunmayan, bir yüzyıl boyunca en zekilerinden olan beyinleri meşgul eden, "reel sayılar" düşünü ve onunla ilgili karmaşık kuramlar ne demeye oluşmuştur?

Cantor ve izleyicisi matematikçilerin hülyası, bilerek ya da bilmeden, mutlak bir görelilik bulmak, usda usun sınırlarından kurtulmaktır. Yaptıklarının usa aykırılığı, ta en baştan, hocası Kronecker tarafından saptanmıştı. Zamanındaki matematikçiler tarafından kabul görmemiş ve eleştirilmişti. Buna karşın, 1904'te the Royal Society of London tarafından ödüllendirilmiş ve the London Mathematical Society'ye alınmış ve yanılsamalarının hakim düşünce hâline gelmesinin yolu açılmıştır. 1918'de (onaylandığından değil olmamış olması arzulanarak ifade ediliyor) kapatılmış bulunduğu akıl sağlığı enstitüsünde, (yine onaylandığından değil olmamış olması arzulanarak ifade ediliyor) sanrılarını yirminci yüzyıl matematikçilerine bırakıp ölmüştür.

Nedir mutlak görelilikler, usun sınırlarının dışında olmasına karşın usda olarak benimsenenler? Nokta ve doğru, birbiriyle tanımlanır. Nokta iki doğrunun kesiştiği yer, doğru noktaların kümesi olarak kabullenilir. Ancak, Zenon'un örneklerinin de gösterdiği gibi, bir süreklilik olarak doğru varsa nokta yoktur, nokta varsa doğru yoktur. Çözüm, yaşananı/gözleneni mantıken olanaksız olduğundan dolayı reddetmektense, her noktanın ve anın bir büyüklüğünün bulunduğunu kabul etmekten geçer. Bu durumda, ne kadar küçük bir zaman aralığı alırsak alalım, anın bir uzunluğu vardır. Suikastçinin attığı kurşun her an hareketlidir. Benzer biçimde ne kadar küçük bir yer kaplarsa kaplasın tüm noktaların bir hacmi vardır. Bu durumda dalgın dalgın ilerleyen arkadaşı yakalamak mantıken imkanlı duruma gelecektir. 0.3333… ile 1÷3 arasındaki ilişki ussal olarak kavranamaz. Usda bulunan bu boşluklar, ancak, yaşantıların ve gözlemlerin yorumlanmasıyla doldurulabilir. Pratikte de yapılan budur. Sonsuz hiç bir zaman yaşanamaz ya da gözlenemez, ve, aynı zamanda, oranlanamadığı için ussal olarak da kavranamaz. Sonsuz hakkındaki her ussal kavrayış sanısı gnostik olacaktır. Aynı şey sıfır içinde geçerlidir. Kullanılabilir, rasyonel tüm sıfırlar, aslında başlangıcın bilinmemesi ve endesk sorunuyla birlikte ele alınmalıdır. Örneğin 0°C, gayet rahatlıkla pozitif bir sayıyla, örneğin 32°F ile gösterilebilir.

Mutlak görelilikler, usun sınırlarının dışında olmasına karşın usda olarak benimsenenler elenirse, mantığın yetersizliği (gereksizliği değil, yetersizliği) ortaya çıkacaktır. Sadece aralıkları bütünlük olarak algılayıp düşünebiliyorsak ve aralıklar süreklilikse, çelişki kaçınılmaz olacaktır. Ancak bu çelişki ne usdadır, ne de doğada. Us kesiklidir ve mantık kuralları içinde tutarlı olmalıdır. Doğa süreklidir ve doğa kuralları içinde tutarlı olduğu düşünülebilir. Çelişki bu ikisi arasındaki belirleme ve kavrama ilişkilerinde ortaya çıkar ve bu çelişkinin ortadan kaldırılması olanaksızdır, ancak diyalektik, çelişkinin içselleştirilerek aşılmasını sağlar. Matematikte bunun yansıması, temellendirmenin büyüklüksüz noktalarla/anlarla değil, aralıklarla yapılmasının gerektiğinin ve her bilimin salt mantığa dayandırıldığında ortaya çıkan yetersizliğinin ampirik çalışmalarla aşıldığının ve matematiğin de bir istisna olmadığının farkına varılması biçiminde tezahür eder. Buna, örneğin, olmak-oluşmak farklılığı göz önüne alınarak başlıktaki sorunun “Kök İki Oluştu Mu? Oluşacak Mı?” biçiminde değiştirilmesiyle başlanabilir.

Son olarak, bu satırların yazarı, konuyla doğrudan ilişkili gözükmemekle birlikte bilim tarihinde yeri bulunan iki kişiliğe değinmeden edemiyor. İlki, gnosisin, bilerek ya da bilmeyerek, matematiğe işlenmesinin hararetli savunucusu olan Bertrand Russel’ın kendini “agnostiğim,” diye tanıtması ve berrak bir “bilim”-”metafizik” ayrımı yaptığını ileri sürüp, yavuz hırsız ev sahibini bastırır misali, “metafizik”e savaş açması gözden kaçmamalıdır. İkinci olarak, birçok badireden sonra Nobel ödülü almış ve, yirmibirinci yüzyıl toplumsal ve beşerî bilimlerindeki gelişmelerin öncülerinden olacağı düşünülebilecek olan Nash’in yaşam öyküsünün, çağdaş matematiğe gnosisin sokulmasının bir anlamda öncüsü olmuş Cantor’un yaşam öyküsüyle benzerlikleri dikkat çekicidir.